Nachtermin 2001

Analysis

BE

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{2(x-2)(x-k)}$ mit $k \in \mathbb{R}$
in der Definitionsmenge $D_{f_k} = \mathbb{R} \setminus \{2; k\}$.

7 1.1 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl und Lage der Nullstellen von f_k und zeigen Sie, dass alle Graphen von f_k zwei von k unabhängige Asymptoten besitzen. Geben Sie die Gleichungen dieser Asymptoten an.

3 1.2 Für $k = 1$ ist die Funktion f_1 mit $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ gegeben.
Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x \to 1} f_1(x) = -1$ gilt und beschreiben Sie kurz den Verlauf des Graphen von f_1 in der Umgebung von $x_0 = 1$.

1.3.0 Für $k = 2$ ist die Funktion $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{2(x-2)^2}$ in $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ gegeben.

9 1.3.1 Ermitteln Sie die Art und Koordinaten des Extremalpunktes des Graphen von f_2.
Zeigen Sie auch, dass der Graph von f_2 einen Wendepunkt besitzt, und geben Sie dessen Abszisse an.
(Teilergebnis: $f_2'(x) = \dfrac{1 - 2x}{(x-2)^3}$)

7 1.3.2 Zeichnen Sie alle Asymptoten sowie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse und nach Berechnung geeigneter Funktionswerte den Graph von f_2 für $-4 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab auf beiden Achsen : 1 LE = 1 cm.

2.0 Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 3 \cdot \ln(x + 4)$
in der maximalen Definitionsmenge $D_g = \left]-4; \infty\right[$.

4 2.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte g(x) für $x \to -4$ und für $x \to \infty$.

8 2.2 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion g und geben Sie die Art und Koordinaten der Extremalpunkte an.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	*Fortsetzung Analysis:*
7	2.3 Begründen Sie, dass die Funktion g im Intervall $]-4; -3{,}9[$ genau eine Nullstelle besitzt. Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren einen Näherungswert für diese Nullstelle in drei Näherungsschritten, ausgehend vom Startwert $x_0 = -3{,}9$.
5	2.4 Skizzieren Sie in einem kartesischen Koordinatensystem für den Bereich $-4 < x \leq 1$ den prinzipiellen Verlauf des Graphen der Funktion g. Verwenden Sie dazu die bisherigen Ergebnisse sowie den Funktionswert g(1). Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm.
2	2.5 Zeigen Sie, dass gilt: $\int \ln(x+4)\,dx = (x+4)\cdot\ln(x+4) - x + C$ mit $C \in \mathbb{R}$.
4	2.6 Der Graph der Funktion g, die Gerade x = 1 und die Koordinatenachsen begrenzen im I. Quadranten ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie auf zwei Nachkommastellen gerundet die Maßzahl seines Flächeninhalts.
	3.0 Durch die beiden Gleichungen $y_1 = 1000 + mx$ und $y_2 = 1000 \cdot e^{kx}$ mit den reellen Konstanten k und m werden mathematisch idealisiert und ohne Verwendung von Einheiten zwei Wachstumsprozesse beschrieben. Für $x_0 = 10$ betragen bei beiden Wachstumsprozessen die zugehörigen y-Werte 2000.
3	3.1 Berechnen Sie die Konstanten k und m. (Teilergebnis: $k = \frac{\ln 2}{10}$)
7	3.2 Berechnen Sie auf zwei Nachkommastellen gerundet den x-Wert aus dem Intervall $[0; 10]$, für den die Differenz $y_1 - y_2$ den absolut größten Wert annimmt.
66	